PART2　反復試行の確率

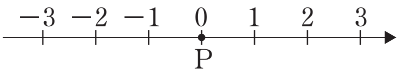
例題

(1)　1個のさいころを5回投げるとき，次の問いに答えよ。

(i)　3の倍数の目がちょうど3回出る確率を求めよ。

(ii)　3の倍数の目が3回以上出る確率を求めよ。

(2)　数直線上を動く点Pが原点にある。1枚の硬貨を投げて，表が出たら正の方向に3，裏が出たら負の方向に2進む。硬貨を5回投げるとき，点Pが原点に戻っている確率を求めよ。



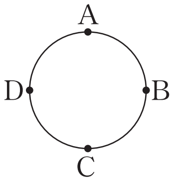
Point Pickup

練習

(1)　1 個のさいころを 4 回投げるとき，次の確率を求めよ。

(i)　5 以上の目がちょうど 2 回出る確率　　(ii)　4 回目に 2 度目の 5 の目が出る確率

(2)　右の図において，点 P は A を出発点として確率 $\frac{2}{3}$ で右回りに 1 つ次の点に移り，確率 $\frac{1}{3}$ で左回りに 1 つ次の点に移る。3 回の移動で，点 P が点 B にいる確率を求めよ。

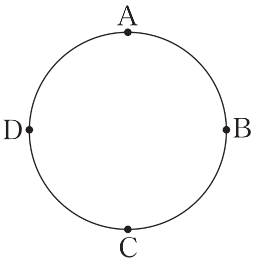


第 5 講　PART2　確認問題

1　1個のさいころを4回投げるとき，5以上の目がちょうど3回出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

2　1個のさいころを4回投げるとき，4回目に3度目の1の目が出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカキ}}}$ である。

3　右の図において，点PはAを出発点として確率 $\dfrac{3}{4}$ で右回りに1つ次の点に移り，確率 $\dfrac{1}{4}$ で左回りに1つ次の点に移る。3回の移動で，点Pが点Bにいる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。



PART2　反復試行の確率

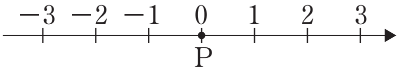
例題

(1)　1 個のさいころを 5 回投げるとき，次の問いに答えよ。

(i)　3 の倍数の目がちょうど 3 回出る確率を求めよ。

(ii)　3 の倍数の目が 3 回以上出る確率を求めよ。

(2)　数直線上を動く点 P が原点にある。1 枚の硬貨を投げて，表が出たら正の方向に 3，裏が出たら負の方向に 2 進む。硬貨を 5 回投げるとき，点 P が原点に戻っている確率を求めよ。



(1)　さいころを 1 回投げて

3 の倍数の目が出る確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$　　3 の倍数の目が出ない確率は $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

(i)　求める確率は ${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$

(ii)　3 の倍数の目が 3 回以上出るのは，3 の倍数の目がちょうど 3 回，または 3 の倍数の目がちょうど 4 回，または 3 の倍数の目が 5 回出るときであり，これらの事象は互いに排反である。よって，求める確率は

$${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_5C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{40}{243}+\frac{10}{243}+\frac{1}{243}=\frac{51}{243}=\frac{17}{81}$$

(2)　硬貨を 1 回投げて，表が出る確率，裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ である。

5 回の試行のうち，表が x 回出るとすると，裏は $(5-x)$ 回出る。

5 回の試行後の点 P の座標は $3x+(-2)\cdot(5-x)=5x-10$

点 P が原点に戻るとき $5x-10=0$ より $x=2$

よって，5 回のうち，表がちょうど 2 回出るときである。

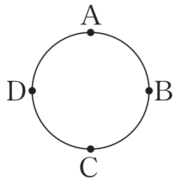
ゆえに，求める確率は ${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

練習

(1)　1個のさいころを4回投げるとき，次の確率を求めよ。

(i)　5以上の目がちょうど2回出る確率　　(ii)　4回目に2度目の5の目が出る確率

(2)　右の図において，点PはAを出発点として確率 $\frac{2}{3}$ で右回りに1つ次の点に移り，確率 $\frac{1}{3}$ で左回りに1つ次の点に移る。3回の移動で，点Pが点Bにいる確率を求めよ。



(1)(i)　さいころを1回投げて

5以上の目が出る確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$　　5以上の目が出ない確率は $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

よって，求める確率は ${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

(ii)　さいころを1回投げて5の目が出る確率は $\frac{1}{6}$，5の目が出ない確率は $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

4回目に2度目の5の目が出るのは，3回目までに5の目がちょうど1回出て，4回目に2度目の5の目が出るときである。

よって，求める確率は ${}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{25}{432}$

(2)　右向きを正の方向，左向きを負の方向とすると，確率 $\frac{2}{3}$ で1，確率 $\frac{1}{3}$ で -1 移動すると考えることができる。3回の移動のうち正の方向に x 回移るとすると，負の方向に $(3-x)$ 回移る。

3回の移動によって，点Pは点Aから $1\cdot x+(-1)\cdot(3-x)=2x-3$ 移動する。

よって，この移動後に点Pが点Bにいるのは

[1]　$2x-3=1$　　[2]　$2x-3=-3$

のいずれかのときであり，これらの事象は互いに排反である。

[1] のとき　$x=2$　　その確率は ${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}$

[2] のとき　$x=0$　　その確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$　　以上より，求める確率は $\frac{4}{9}+\frac{1}{27}=\frac{13}{27}$

第５講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：8，イウ：81

[解説]

さいころを１回投げて

５以上の目が出る確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

５以上の目が出ない確率は　$1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

よって，５以上の目がちょうど３回出る確率は

$${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)=4\times\frac{2}{3^4}=\mathbf{\frac{8}{81}}$$ [A]

[A]　反復試行の確率
１回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返し行う反復試行で，A がちょうど r 回起こる確率は
$${}_nC_r p^r(1-p)^{n-r}$$
ここでは，５以上の目が４回中のどの３回で出たかを表すのが ${}_4C_3$ である。

2

[正解] エ：5，オカキ：432

[解説]

さいころを１回投げて１の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$，１の目が出ない確率は　$1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

４回目に３度目の１の目が出るのは，３回目までに１の目がちょうど２回出て，４回目に３度目の１の目が出るときである。

よって，求める確率は

$${}_3C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)\times\frac{1}{6}=3\times\frac{5}{6^4}$$ [B]

$$=\mathbf{\frac{5}{432}}$$

[B]　反復試行の確率
１回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返し行う反復試行で，A がちょうど r 回起こる確率は
$${}_nC_r p^r(1-p)^{n-r}$$

3 **[正解]** **ク**：7，**ケコ**：16

[解説]

右向きを正の方向，左向きを負の方向とすると，確率 $\frac{3}{4}$ で 1，確率 $\frac{1}{4}$ で -1 移動すると考えることができる。

3 回の移動のうち正の方向に x 回移るとすると，負の方向に $(3-x)$ 回移る。3 回の移動によって，点 P は点 A から

$$1\cdot x+(-1)\cdot(3-x)=2x-3$$ [C]

移動する。

[C]　どんな事象が何回起こったかを方程式を立てて求める。

よって，この移動後に点 P が点 B にいるのは

[1]　$2x-3=1$

[2]　$2x-3=-3$

のいずれかのときであり，これらの事象は互いに排反である。

[1]のとき　$x=2$

その確率は

$${}_3C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)=3\times\frac{9}{64}=\frac{27}{64}$$ [D]

[D]　反復試行の確率

[2]のとき　$x=0$

その確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$$

以上より，求める確率は

$$\frac{27}{64}+\frac{1}{64}=\frac{28}{64}=\mathbf{\frac{7}{16}}$$